



TITLE:

Fluid-in-Cell法による気体流れの数値解 (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

松田, 卓也

CITATION:

松田, 卓也. Fluid-in-Cell法による気体流れの数値解 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1974, 218: 169-178

ISSUE DATE:

1974-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105287>

RIGHT:

Fluid-in-Cell 法による気体流れの数値解^{*}

京大 エ 松田卓也

§ 1. はじめに

流体力学の方程式を解く場合、その方法は大別して、解析的方法と数値計算にわけることができる。解析的方法は厳密解が得られる場合は、きわめて有効であるが、流れが複雑になると、種々の近似を行なわなければならない、本当に欲しい場合の結果が得られない可能性がある。その点、数値計算法には、そういった制限は少いが、電子計算機的能力による制限がある。

一次元の圧縮性流体の流れを数値計算で解くことは、かなり古くから行なわれ、現在は完成の域にある。しかし二次元の計算になると膨大な計算量を必要とするので、その発展は電子計算機の発展をまたねばならず、1960年代に入って、本格的な研究がなされるようになった。1960年代の後半には、単純な Euler 法や Lagrange 法の他に、数多くのすぐれた手法が開発された。

^{*} 本研究は Mr. Søren-Aksel Sørensen, 榎井健郎教授と共同でなされたものである。

Lagrange 法は流体の変形が小さい場合には、すぐれた方法であるが、変形が大きくなると使えなくなる。Lagrange 法と Euler 法を結合した手法の一つとして Particle in-Cell 法がある (PIC)。これは Eulerian mesh を用いるが、その中の Particle を動かすという点では Lagrange 的である。PIC 法は多くの利点を持つ、すぐれた方法であるが、大きな記憶容量と長い計算時間を必要とするので、巨大な電子計算機を必要とする。PIC 法とほぼ同じ計算方式を用いるが、しかし比較的小さな計算機でもできる方法として考えられたのが、これから述べる Fluid-in-Cell 法 (FLIC 法) である。ここでは FLIC 法の概要と、その天体物理学への応用例について述べる。

§ 2. FLIC 法

基本になる式は流体力学方程式である。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla (P + \mathcal{E}) \quad (1)$$

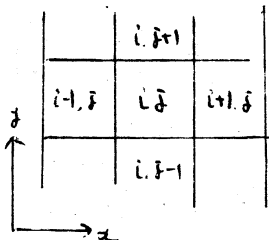
$$\frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) I = - \frac{P + \mathcal{E}}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

$$P = (\gamma - 1) \rho I \quad (4)$$

ここに K は外力、 γ は人工粘性、 I は比内部エネルギー、 γ は比熱比である。

図 1



この方程式を差分法で解くため、空間を図1のように cell に分割する。速度 u, v 、 ρ 、 P 、 I は cell の中心で定義されている。

時刻 $t = t^n$ における物理量が知られている時、次の時刻 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ の物理量を次に述べるように二段階に分けて求める。

第一段階は方程式 (1), (2) の左辺の $(u \cdot \nabla)$ の項、いわゆる移流項を無視して、 u 、 I の仮の値、 \hat{u} 、 \hat{I} を求める。

第二段階は (1), (2) を保存形に書きなおす。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \cdot u) = -\nabla(P + \gamma) + \rho K \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(I + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left\{ \rho \left[I + \frac{1}{2} u^2 \right] u \right\} = -\nabla \cdot [(P + \gamma) u] + \rho u \cdot K \quad (6)$$

そして (5), (6) の右辺を無視した式と (3) から、新しい u 、 I 、 ρ を求める。差分形の詳しい式は Gentry, Martic and Daly, J. Comp. Phys. Vol 1 (1966), 87. を参照。Gentry たちは円柱座標を採用しているが、我々は解くべき問題の性質上、直角座標を採用した。これによって差分方程式は、むしろ簡単に

になり計算時間はかなり短縮される。

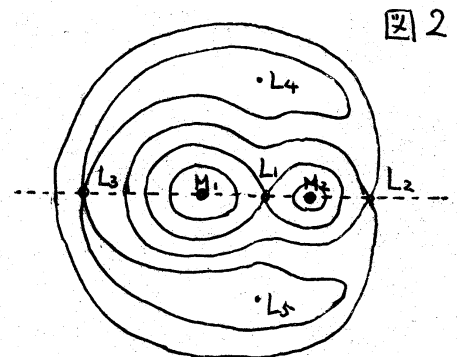
§ 3. 近接連星のまわりのガスの流れ

上記の FLIC 法を天体物理学の問題に適用した例について述べよう。夜空に輝く恒星のうち、ほぼ半数は、相互の重力で結合系を作っている、いわゆる連星系をなしている。連星系のうちでも、二つの星の距離がきわめて近い、いわゆる近接連星は様々な興味深い性質を示す。一口に距離が近いと言っても色々ありうるが、そのうちでも公転周期が数日程度のものが、X線星の問題と関連して、最近、興味を集めている。

連星系における力学を考える上で重要な概念に Roche ポテンシャルがある。いま二つの質点が相互に円軌道を描いて回転しているとすると、その二つの質点が静止して見える回転系に乗って考えよう。二つの質点による重力と、遠心力の効果をあわせたものが Roche ポテンシャルである。

図2に等ポテンシャル面の公転軌道面における断面を示す。

ここで L_1 から L_5 は Lagrange 点とよばれている。重力と遠心力の合力が0になる点である。



特に L_1 は inner Lagrangean 点とよばれる重要点である。 L_1, L_2, L_3 はポテンシャルの峠道、 L_4, L_5 は頂上になっている。 L_1 を通る等ポテンシャル面が特に重要で Roche robe とよばれる。 L_1 を通る等ポテンシャル面が特に重要で Roche robe とよばれる。

連星系は二つの星と Roche robe の相互関係によって三つに分類できる。

(a) 星が二つとも Roche robe の中に入っ

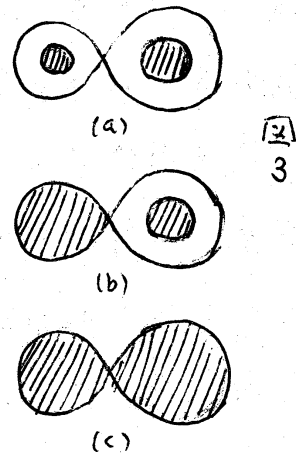
ている場合 - Detached-System

(b) 一方の星が Roche robe をみたしてい

る場合 - Semi-Detached-System

(c) 両方の星が Roche robe をみたしてい

る場合 - Contact System



星は Roche robe の外には安定に存在しえない。 Roche robe の外にあるガスは他方の星に落ちこむか、いずれ系外へ流出してしまうからである。

さて我々に特に興味あるのは Semi-Detached System である。

これが実は X 線星のモデルである。 Roche robe をみたしている星から、何らかの機構であふれ出たガスが、他方の星のように高密度の小さい星（白色矮星、中性子星、ブラックホール）に落ちこむ時に、同じように高温になって X 線を放出すると考えられている。本研究はこの近接連星系におけるガスの流れを定量的に調べようというものである。

§4. 基本仮定

流れは実際は三次元的になっているが、ここでは計算の簡単の爲、公転面のごく近傍のみに限って解き、二次元的計算を行う。観測的に言えば、ガスは公転面附近に集中しており、いわゆる disk を形成している。だから二次元という近似はそれほど悪いものではない。

境界条件としては、ガスを放出する星の表面でガスの速度、密度、内部エネルギーを与え、高密度星は質点と考え、ただそのまわりの cell では適当なガスの吸い込みがあるとする。外部の境界ではガスは自由に流出できるとする。

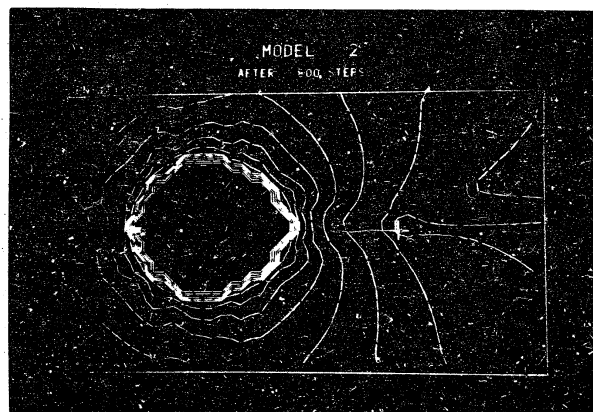
この問題には4つの無次元パラメーターがある。その一つは二つの星の質量比 M_1/M_2 である。ここでは、それが1の場合の例のみを示す。次に星表面で与えるガスの速さ v_0 と系の回転速度の比 R である。 $R \equiv v_0/\Omega L$ 、但し Ω は系の回転角速度、 L は系の重心からガスを放出する星の中心までの距離である。次に星表面の音速と ΩL の比 A である。 $A \equiv c_0/\Omega L$ 。 A は星表面の温度をあらわすパラメーターと考えてよい。ちなみに $M \equiv R/A$ は星表面でのガスのマッハ数である。最後に星表面でガスの速度ベクトルが星表面の法線に対する角度 θ である。 θ としては $0, \pm 45^\circ$ の場合のみを調べた。

§ 5. 計算結果

計算はちょうど L_2, L_3 を含むような範囲で行なわれ、その領域を 48×28 の cell に分割した。初期条件としては、領域全体に静止した密度の低いガスを仮定し、 $t=0$ で一方の星からガスの放出を開始する。そして解が十分に定常になったと思われる所まで時間ステップをおって計算した。その時間ステップ数はパラメターにより異なるが、ほぼ 800 から 1450 である。計算時間は FACOM 230/75 で 1 ステップあたり 0.47 秒である。注目すべき事は、領域の一部が乱流状態になる事があり、その領域ではもちろん定常ではあり得ない。計算結果は一度ファイルに蓄えられ、その結果を FACOM 270/30 に移して Graphic Display と X-Y plotter で表示した。数多くのモデルについて計算したが、ここでは代表的なもののみを示す。

○モデル 2 $R=0.05$, $A=7.45$, $(M=0.0067)$, $\theta=0$

このモデルは R が小さく A が大きい。という事は初速度は十分小さいが、星の表面温度がきわめて高い場合に対応している。その結果、放出



されたガスは圧力勾配力で急速に加速され、星の全面から高速でほぼ動径方向に脱出する。写真には等密度線が示してあるが、その間の事情が分る。第2の星は十字印で示してあるが、全体の流れにあまり大きな影響を与えていない。ガスの得た運動エネルギーが重力エネルギーに比べて十分大きいからである。L₁点附近で等温度線が凹んでいるのは、そのあたりで重力が弱く、ガスの流速が速いからである。系全体は反時計まわりに回転している。コリオリ力の影響のため、図はもろろん上下対称でない。

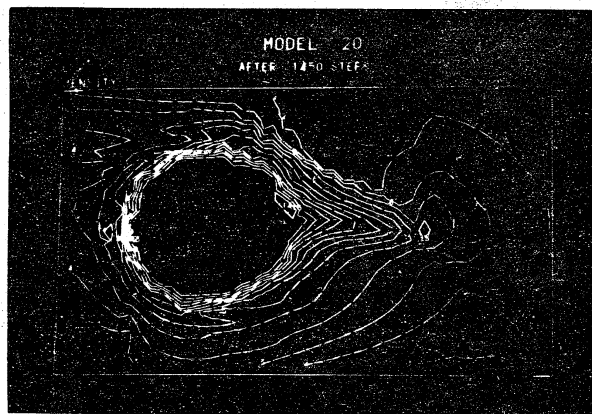
Aを1.667, 0.625, 0.1667にした場合も調べた。これらの場合はガスの流速がモデル2より小さく、第2の星及びコリオリ力の影響が大きい。Aが1.667の場合、ガスはやはり星の全面から脱出するが、第2の星のまわりに渦を作る。Aが0.625の場合はガスは主としてL₁点から第2の星の方に放出され、特徴ある舌状構造を示す。この特徴は後のモデル20, 21と同じである。舌状構造の存在は観測によつて確かめられている。Aが0.1667の場合は、エネルギーが不足してガスはほとんど放出されない。

。モデル20 $R=0.7$ $A=0.33$ ($M=2.12$) $\theta=45^\circ$

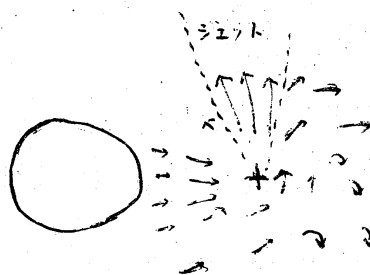
通常、近接連星系をなす星は回転系に対して回転していない。別の言い方をすれば、一方の星は他方の星に対して常

に同じ面をみせている。その理由は、はじめに星が回転系に対して回転していたとしても、潮汐力のために回転が止まってしまうからである。月が地球に対して常に同じ面を向けているのはそのためである。しかし、十分に時間がたっていないければ、近接連星系を作る星も回転している場合がある。この効果を調べるために、ガスが星の表面に対して $\pm 45^\circ$ の角度を持って放出されるモデルを調べた。 $\theta = 45^\circ$ の場合は星と系の回転方向が一致、 $\theta = -45^\circ$ の場合は反対向きである。

モデル20の写真からL点を通る舌状構造がはっきりとある。ただ舌の位置は $\theta = 0, -45^\circ$ の場合より上にずれている。写真でみるかぎり、密度分布に対する θ の影響はそれほど大きいものではない。



図に速度分布の概要を示すが、速度分布は $\theta = 45^\circ$ の場合と $\theta = 0, -45^\circ$ の



場合は根本的に異なっている。つまり $\theta = 45^\circ$ のモデルではオ2の星の上方に高速のジェットが形成されるが、一方 $\theta = 0, -45^\circ$ の場合はスパイラルを描いてガスがオ2の星に落下する

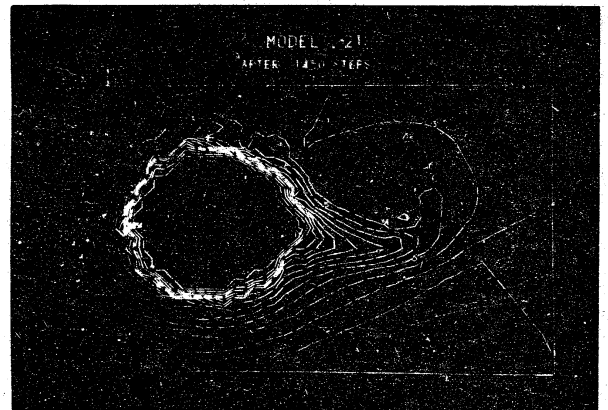
だけである。 ジェットが観測される連星系は存在する。

。モデル 21 $R=0.7, A=0.33 \quad \theta=-45^\circ$

オ1の星から出たガスは、主としてL点を通してオ2の星のまわりをまわり、リング状の密度の高い部分を形成する。

リングの存在は観測的によく知られた事実である。

このように我々の計算によって近接連星系のまわりのガスの流れは、むしろよく理解され、観測とも、定性的に一致



あるか、きわめてよく一致を示した。将来、三次元的な計算が行なえるようになれば、さらに興味深い事実がつかめると予想される。しかし本質は二次元計算でつきこまう。

謝辞

京大・工航空工学の Mr. Soren-Aksel Sorensen 及び 桜井健郎教授の有益な discussion, suggestion に感謝します。なお数値計算は Mr. Soren-Aksel Sorensen が行ったものです。

文献

S.-A. Sorensen, T. Matsuda & T. Sakurai, Prog. Theor. Phys. (1974) to be published.